

Rhéophysique des suspensions concentrées : cadre théorique et similitude

Christophe Ancey, Peter Vollmöller, Steve Cochard

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
ENAC/ICARE/LHE, station 18
1015 Lausanne, Suisse
christophe.ancey@epfl.ch

Résumé :

Bien des matériaux rencontrés dans l'environnement et l'industrie ont l'apparence de fluide quoiqu'ils soient en fait des suspensions de particules dans un fluide. Les avalanches, les laves torrentielles, le béton frais, etc. fournissent des exemples de tels matériaux. Quand ces suspensions peuvent être testées au laboratoire avec des rhéomètres, elles se caractérisent par des propriétés rhéologiques complexes. Ces propriétés restent difficiles à comprendre si l'on reste dans le cadre de la mécanique des milieux continus, cadre dans lequel les lois rhéologiques sont le plus souvent exprimées. L'approche rhéophysique est une alternative intéressante pour décrire la dynamique de telles suspensions. L'article offre une revue des principales notions utiles à la compréhension des propriétés rhéologiques. L'accent est particulièrement mis sur le rôle des interactions entre particules et les nombres sans dimension caractérisant les régimes d'écoulement.

Abstract :

Many materials involved in environmental or industrial problems take the appearance of fairly homogeneous fluids on the bulk scale although they are suspensions made up of solid particles in air or water. Typical examples include avalanches, debris flows, fresh concrete, etc. When these suspensions can be tested with the usual laboratory rheometers, they exhibit a wide range of bulk rheological properties (time-dependent effects, viscoplasticity, etc.) and flow effects (particle migration, shear localization). Such properties are difficult to understand and describe within the framework of continuum mechanics, in which they are most often expressed. A rheophysical approach is an alternative and fruitful way to describe the dynamics of these suspensions. This paper reviews the main notions that are useful for understanding their rheological properties. Emphasis is given to the role played by a percolating network of coarse particles and the nature of contact between particles and the dimensionless numbers that can be used to characterize the flow regimes.

Mots-clefs :

rhéophysique, suspension, similitude

1 Introduction : les fondements de l'approche rhéophysique

L'analyse du lien existant entre le comportement macroscopique d'une suspension et le comportement individuel de ses constituants est un sujet déjà ancien. Outre les analyses préliminaires d'Einstein et de Landau, Batchelor a proposé dès les années 1970 un cadre théorique de calcul de la loi de comportement macroscopique d'une suspension diluée de particules (non colloïdales) à partir d'une moyenne des interactions fluide/particules [1]. Ce cadre d'analyse a été progressivement étendu pour prendre en compte des interactions particulières plus complexes (interactions colloïdales, mouvement brownien), des concentrations plus importantes en particules, etc. Principalement, les travaux théoriques de Buyevich [2], Lhuillier [3, 4] ainsi que de Zhang et Prosperetti [5] ont posé des jalons importants dans notre compréhension actuelle des suspensions concentrées (c'est-à-dire dont la teneur volumique en solide dépasse les 30 %) ; la prise en compte d'effets visqueux dans la théorie cinétique des gaz a également été réalisée ces dernières

années [6, 7]. Devant la complexité des lois rhéologiques formulées, des approches simplifiées ont également mises en œuvre, notamment par Van der Brule et Jongshaap [8], Ancy *et al.* [9], etc.

Nous allons ici de rappeler brièvement les principes de l'approche rhéophysique et déduire les nombres sans dimension importants qui caractérisent les écoulements de suspensions concentrées.

1.1 Mouvement d'une sphère isolée et conséquences sur la nature de l'écoulement

Le point de départ de toute approche rhéophysique est d'examiner le comportement du matériau à une échelle microscopique, puis d'en déduire son comportement à l'échelle macroscopique par passage à la moyenne. Le changement d'échelle est une nécessité dès lors que, dans les calculs et les applications, on s'intéresse à des variations de grandeurs moyennes et non au détail de la microstructure. Dans le cas d'une suspension de particules de même taille, le choix naturel de l'échelle microstructurelle est la taille moyenne des particules. Pour commencer, considérons une particule supposée rigide dans un fluide newtonien, que l'on va supposer être en régime laminaire. Le mouvement local du fluide de masse volumique ρ_f et animé d'une vitesse \mathbf{u}_f est décrit par les équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \mathbf{u}_f \cdot \nabla \mathbf{u}_f = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_f = 0, \quad (2)$$

où l'on a introduit p la pression généralisée et $\boldsymbol{\sigma}_f$ le tenseur des extra-contraintes (ici $\boldsymbol{\sigma}_f = 2\mu \mathbf{d}$ où \mathbf{d} désigne le tenseur des taux de déformation). Les conditions aux limites pour la frontière entre phases fluide et solide sont données par une condition de non-pénétration : $\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{k} = 0$, où \mathbf{k} désigne la normale à l'interface entre phases, et l'égalité des contraintes aux interfaces.

Pour la particule solide, on écrit l'équation de la quantité de mouvement sous la forme lagrangienne suivante

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{g} + \frac{1}{m_p} \mathbf{F}(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_f), \quad (3)$$

où $\mathbf{F}(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_f)$ désigne le champ de force résultant de l'interaction du fluide et de la particule, m_p est la masse de la particule et \mathbf{u}_p la vitesse de son centre de gravité. Notons que pour l'instant la force $\mathbf{F}(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_f)$ n'est pas définie ; dans l'expression de la dépendance de \mathbf{F} vis-à-vis des variables de l'écoulement, nous avons fait l'hypothèse qu'elle dépend de la vitesse instantanée de la particule et du champ (eulérien) de vitesse instantanée du fluide (donné par les équations de Navier-Stokes). On voit immédiatement le couplage qui existe entre les deux jeux d'équations puisque pour résoudre les équations de Navier-Stokes, il faut connaître les conditions aux limites, donc la position de la particule, et que pour connaître la position de cette dernière à un instant donné, il faut connaître le champ de vitesse du fluide.

Pour y voir plus clair dans ce couplage, nous allons maintenant transformer ces équations afin de faire apparaître les nombres sans dimension importants. Introduisons a une longueur caractéristique de la particule et U une échelle de vitesse du fluide. L'échelle de temps pour le fluide s'en déduit : a/U . Pour définir un temps caractéristique du fluide, plusieurs stratégies sont possibles. Pour simplifier le choix, on va déjà écarter les systèmes dominés par la gravité pour lesquels $m_p \mathbf{g} \gg \mathbf{F}(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_f)$. On va définir le temps caractéristique de la particule comme un temps de relaxation, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que la vitesse varie de

façon appréciable sous l'action du fluide quand on modifie subitement l'équilibre de la particule. Si l'on désigne par F l'ordre de magnitude de la force d'interaction, un examen des termes prédominants dans (3) montre qu'il faut définir le temps de relaxation de la particule comme étant : $t_p = m_p U / F$. Exprimons maintenant les équations précédentes sous une forme sans dimension (les variables sans dimension portent un tilde)

$$Re_p \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_f}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}}_f \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}_f \right) = - \frac{P \rho_f a}{\mu U} \nabla \tilde{p} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_f, \quad (4)$$

où P est l'échelle de pression généralisée, qu'on prendra ici égale à $P = \mu U / (\rho_f a)$ et $Re_p = \rho_f U a / \mu$ est le nombre de Reynolds particulaire. Pour la particule solide, on aboutit à

$$St \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_p}{d\tilde{t}} = \frac{m_p}{F} \mathbf{g} + \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{u}}_p, \tilde{\mathbf{u}}_f), \quad (5)$$

avec $St = t_p / t_f$ le nombre de Stokes. Interprétons maintenant les équations et les régimes d'écoulement qui en découlent à l'aide des nombres sans dimension introduits.

Examinons tout d'abord le cas $St \gg 1$. Le temps caractéristique du fluide étant petit devant le temps de relaxation de la particule, le fluide a le temps de s'adapter aux variations du mouvement de la particule et inversement la particule ne subit pas les actions rapides¹ du fluide principalement parce que le terme de couplage \mathbf{F} est trop faible (la particule voit en revanche les variations lentes dans le mouvement du fluide). En pratique cela signifie que le mouvement de la particule et l'écoulement fluide sont à traiter séparément et qu'il faut tenir éventuellement compte d'un terme de couplage. Si maintenant on ne considère plus une seule particule mais une collection de particules, cela signifie qu'une fois qu'on a moyenné les équations du mouvement de chacune des deux phases, on se retrouve avec deux équations reliées par un terme de couplage. Physiquement cela veut donc dire qu'à l'échelle macroscopique, les écoulements gardent un caractère franchement biphasique. Le transport de sédiment dans les rivières offre un exemple de suspensions gardant un caractère biphasique à l'échelle macroscopique.

Dans le cas inverse $St \rightarrow 0$, le temps de relaxation étant très petit devant l'échelle de variation du fluide, la particule a le temps de s'ajuster à toute variation du fluide. On déduit de l'équation (5) que $m_p \mathbf{g} / F = -\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{u}}_p, \tilde{\mathbf{u}}_f)$, c'est-à-dire qu'il doit exister une fonction h telle que $\tilde{\mathbf{u}}_p = h(\tilde{\mathbf{u}}_f)$. La particule est donc esclave de la phase fluide. En pratique cela implique que le mouvement de la particule se déduit immédiatement de la connaissance du mouvement du fluide. Si on extrapole cela au cas des suspensions de particules, le régime $St \rightarrow 0$ peut être décrit à l'aide d'une seule équation moyennée représentant le comportement des deux phases. Dans ce cas, le comportement macroscopique du mélange est identique à celui d'un fluide monophasique (malgré le caractère biphasique à l'échelle locale).

1.2 D'une sphère isolée à une collection de sphère en suspension : passage à la moyenne

Le passage à la moyenne peut être conduit de manière rigoureuse lorsque $Re_p \rightarrow 0$ et $St \rightarrow 0$ et la concentration volumique ϕ (définie comme le rapport du volume de solide sur le volume total) est petite ($\phi \ll 1$). Nous commençons par indiquer comment ce passage est classiquement réalisé pour les suspensions diluées à petit nombre de Reynolds avant d'indiquer les limites d'un tel traitement.

¹Une manière plus rigoureuse de montrer cela est de prendre la transformée de Fourier des équations (4–5) [10].

Un des moyens les plus efficaces de construire un opérateur de moyenne est de considérer que l'on est (fictivement) capable de réaliser un très grand nombre d'essais (on les appellera des réalisations) avec les mêmes conditions macroscopiques (mêmes conditions aux limites, même nombre de particules, etc.); seule change donc la position des N particules. On définit la moyenne d'ensemble comme la moyenne de toutes les réalisations possibles; l'ensemble \mathcal{C}_N de toutes les réalisations possibles constitue l'espace des phases du système, c'est-à-dire l'ensemble des paramètres nécessaires à spécifier l'état du système. Dans le cas présent, l'état du système est entièrement déterminé si on connaît la position de toutes les particules. On introduit la probabilité P d'observer N particules dans une configuration donnée \mathcal{C}_N . La moyenne d'ensemble d'une quantité f s'écrit donc $\langle f \rangle(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{C}_N} d\mathcal{C}_N P(\mathcal{C}_N) f(\mathbf{x}, t|\mathcal{C}_N)$.

L'étape suivante est de prendre la moyenne d'ensemble des équations du mouvement (1–3) [11]. Ces équations moyennes font apparaître des termes traduisant ce qui se passe à l'interface solide-fluide. Ces termes sont construits comme des moyennes (dites conditionnelles) de l'état de contrainte à la surface de la particule lorsque la position des autres particules est connue; on débouche sur une suite hiérarchique d'équations que l'on ferme en postulant que la concentration solide est faible (c'est-à-dire qu'il n'y a que des paires de particules en interaction hydrodynamique). Une approche tout aussi rigoureuse peut être menée dans le cas inverse où le nombre de Stokes est très grand et le nombre de Reynolds particulaire est

- soit petit : $Re_p \ll 1$ et $St \gg 1$, ce qui implique que la phase fluide peut répondre instantanément au mouvement des particules. C'est typiquement le cas d'une suspension de particules dans un gaz. On peut alors développer une théorie cinétique avec des concepts assez voisins du traitement hydrodynamique [12];
- soit très grand : $Re_p \gg 1$ et $St \gg 1$, ce qui implique que la phase fluide peut être traitée comme un fluide parfait (non visqueux). Certaines émulsions (écoulement de bulles d'air dans de l'eau par exemple) peuvent être dans ce cas de figure. Là encore, le comportement macroscopique peut être décrit à l'aide d'une théorie cinétique.

Toutefois, hormis ces quelques cas limites, le passage à la moyenne soulève des difficultés théoriques de différent ordre :

- dès que l'inertie du fluide n'est plus négligeable, on tombe sur deux difficultés majeures. Premièrement, la moyenne de l'équation (1) donne un terme de la forme $\nabla \cdot \langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle$, qui ne peut pas être exprimé simplement en fonction, de \mathbf{u} , puisque la décomposition de Reynolds nous amène à une expression de la forme $\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$, qui fait apparaître un terme cinétique (tenseur de Reynolds). De plus, un second terme apparaît quand on moyenne l'équation (1) : $\langle \partial\mathbf{u}/\partial t \rangle$, ce qui implique que l'histoire de la configuration est à prendre en compte et conduit à inclure dans l'espace des phases l'accélération des particules. Enfin il faut noter que l'apparition de non-linéarités dans l'équation de Stokes ne permet plus d'appliquer le principe de superposition, qui permettait précédemment d'obtenir des solutions générales à la base des méthodes analytiques et numériques;
- dès que la concentration solide devient suffisamment grande, les interactions entre particules commencent à jouer un rôle clé dans la dynamique des suspensions. Les équations de fermeture et les approximations précédemment utilisées ne sont plus valables car on commence à avoir des interactions à trois particules (et plus);
- lorsque le nombre de Stokes est intermédiaire ($St = \mathcal{O}(1)$), le couplage entre phases continue et dispersée devient complexe, ce qui se traduit à l'échelle macroscopique par l'impossibilité de traduire le comportement moyen avec l'approximation de fluide monophasique;

- on va le voir plus, lorsque la concentration solide augmente jusqu’à approcher la concentration maximale d’entassement, un réseau de particules en contact se forme. Les contacts (ici pris dans un sens très général) sont le siège de dissipations parfois importantes qui mettent en jeu la rotation des particules. Il faut donc des équations supplémentaires pour prendre en compte ce nouveau degré de liberté du système.

Pour contourner cette difficulté, les chercheurs ont eu recours à différentes méthodes plus ou moins élaborées, comme l’introduction de nouvelles équations de fermeture, *ad hoc* ou tirées de simulations numériques. Nous allons ci-après montrer le développement d’un cadre de traitement adapté à la modélisation des suspensions très concentrées.

2 Lois de comportement des suspensions très concentrées

Ici, nous parlons de suspensions très concentrées pour désigner des systèmes de particules dont la concentration solide est proche du seuil maximal d’entassement ϕ_m . Cela confère quelques propriétés remarquables au système, propriétés que l’on recense ici rapidement :

- il peut se former un réseau de particules en contact (le terme *contact* est ici toujours dans un sens très général) ;
- ce réseau peut transmettre des forces sur de grandes distances presque instantanément ;
- ce réseau peut générer des efforts importants au niveau des contacts ;
- les contraintes géométriques liées à ce réseau lorsqu’il doit s’écouler amènent aux phénomènes de dilatance et de blocage ;
- comme on est proche de la concentration maximale d’entassement, on peut avoir des transitions entre un comportement fluide (grandes déformations) et un comportement solide (faibles déformations) ;
- les voûtes du réseau donnent naissance à des zones enclavées où le niveau de contrainte peut être significativement plus faible ;
- les hétérogénéités de contraintes peuvent être également associées à des variations locales de concentration solide.

2.1 Point de départ : équations du mouvement

Pour simplifier le problème, nous allons considérer que les particules sont sphériques (de rayon a), rigides, et de même taille, que la phase continue est un fluide Newtonien, et que l’écoulement est en cisaillement simple. Cette dernière hypothèse sur le champ cinématique est rendue ici nécessaire pour pouvoir utiliser la notion de suspension statistiquement homogène dans le calcul des moyennes. Le nombre de particules par unité de volume (nombre de densité) est n que l’on relie à la concentration solide volumique ϕ par $n = \phi / (4\pi a^3 / 3)$.

L’approche consiste dans un premier temps à obtenir une moyenne de volume des équations du mouvement, puis ensuite à utiliser une moyenne d’ensemble. L’opérateur *moyenne de volume* se construit simplement en prenant la moyenne intégrale sur un volume de contrôle \mathcal{V} supposé de taille suffisamment grande pour contenir un grand nombre de particules mais suffisamment petit par rapport à l’échelle de longueur macroscopique du problème étudié. En cisaillement simple, l’idée est de choisir une forme très allongée le long de la direction du cisaillement et de hauteur faible de telle sorte que la suspension y soit statistiquement homogène. La moyenne de

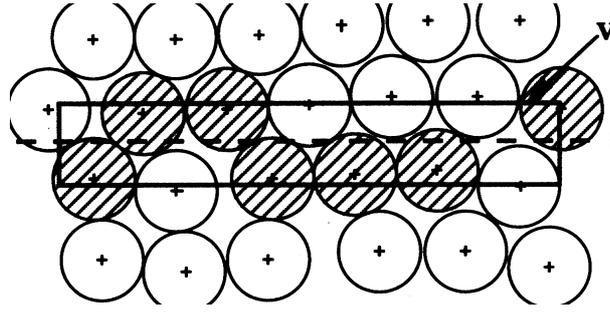


FIG. 1 – Volume de contrôle

volume d'une quantité f s'écrit alors

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V}. \quad (6)$$

Ici l'un des principaux avantages de cet opérateur est qu'on peut le permuter avec l'opérateur de dérivation temporelle ou spatiale. La principale subtilité ici est qu'on intègre des champs sur un volume de contrôle fixe \mathcal{V} comprenant les deux phases. On définit alors une fonction d'appartenance à la phase solide : $H(\mathbf{x}) = 1$ si \mathbf{x} est à l'intérieur d'une particule et $H(\mathbf{x}) = 0$ si \mathbf{x} prend place dans la phase continue. On appelle \mathcal{V}_p le sous-volume de \mathcal{V} comprenant les particules et \mathcal{A}_p la surface enveloppant \mathcal{V}_p .

On multiplie l'équation (1) par $1 - H$, puis on intègre sur le volume \mathcal{V} . En se servant de la conservation de la masse ($\partial H/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla H = 0$), de la relation $\nabla H = \mathbf{k}$ sur \mathcal{A}_p avec \mathbf{k} la normale extérieure à \mathcal{A}_p (et $\nabla H = 0$ sinon), et de la décomposition de Reynolds $\mathbf{u}_f = \bar{\mathbf{u}}_f + \mathbf{u}'_f$, on peut en fin de compte écrire

$$\rho_f \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_f}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_f \bar{\mathbf{u}}_f \right) = -\nabla \bar{p} + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{A}_p} (\sigma_f - p\mathbf{1}) \cdot \mathbf{k} d\mathcal{A} + \nabla \cdot \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_f} (\sigma_f - \rho_f \mathbf{u}'_f \mathbf{u}'_f) d\mathcal{V}. \quad (7)$$

Dans cette équation, il faut comprendre la vitesse moyenne de la phase continue comme étant

$$\bar{u}_f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (1 - H(\mathbf{x}, t)) u_f(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V} = \frac{1 - \phi}{\mathcal{V}_f} \int_{\mathcal{V}_f} u_f(\mathbf{x}, t) d\mathcal{V},$$

où l'on s'est servi de la définition de la concentration solide $\int_{\mathcal{V}} (1 - H) d\mathcal{V} = 1 - \phi$. Ici, on a donc défini la vitesse moyenne de la phase continue au niveau du volume de contrôle ; cette vitesse moyenne vaut $1 - \phi$ la vitesse fluide réelle (c'est-à-dire celle moyennée sur le volume occupé par le fluide).

Pour le solide, il faut nous ramener tout d'abord à une forme eulérienne du mouvement. L'hypothèse de sphère rigide entraîne que le champ cinématique au sein d'une particule est de la forme : $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_p(\mathbf{y}, t) + \omega_p \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})$ avec \mathbf{y} la position du centre de gravité et ω la vitesse de rotation de la particule. Comme le gradient d'un champ rotationnel est nul, l'équation locale pour une particule solide s'écrit alors : $\rho_p \partial \mathbf{u}_p / \partial t = \rho_p \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma_p$, avec ici une première difficulté : la particule étant rigide, le champ de contrainte est indéfini. En fait cela ne constituera pour la suite qu'un problème mineur dans la mesure où si l'on intègre cette équation sur son volume, la relation de Green-Ostrogradski permet de relier ce champ aux forces agissant à la

surface du solide. On procède comme précédemment en multipliant l'équation précédente par H puis en intégrant sur \mathcal{V} . On notera qu'en fait \mathcal{V} n'englobe pas nécessairement des volumes entiers de particule, comme cela est schématisé sur la figure 1. De nouvelles manipulations amènent à

$$\rho_p \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_p}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_p \bar{\mathbf{u}}_p \right) = \phi \rho_p \mathbf{g} + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p - \rho_p \overline{\mathbf{u}'_p \mathbf{u}'_p}) - \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{A}_p} \boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{k} d\mathcal{A}. \quad (8)$$

Puisqu'à la surface des particules on a : $\boldsymbol{\sigma}_p \cdot \mathbf{k} = (\sigma_f - p\mathbf{1}) \cdot \mathbf{k}$, le dernier terme du membre de droite, représentant les contraintes exercées à la surface des particules, équivaut (au signe près) au terme similaire dans l'équation (7). Ces termes reflètent les transferts de quantité de mouvement qui existent entre les deux phases, transferts qui se réalisent donc simplement à travers leur interface commune.

Il est possible de définir une vitesse locale sous la forme : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = H\mathbf{u}_p(\mathbf{x}, t) + (1 - H)\mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t)$. La vitesse moyenne volumique s'écrit donc : $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}_p(\mathbf{x}, t) + \bar{\mathbf{u}}_f(\mathbf{x}, t)$. On peut également définir une vitesse moyenne massique : $\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}_m = \rho_p \bar{\mathbf{u}}_p + \rho_f \bar{\mathbf{u}}_f$, avec $\bar{\rho} = \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_f$. Les deux vitesses ne coïncident que lorsque les masses volumiques des deux phases sont égales. Une approximation utile peut être faite quand la masse volumique de l'une des phases est très faible devant l'autre et la vitesse moyenne des deux phases est du même ordre de grandeur. Si l'on reprend l'analyse dimensionnelle précédente, un tel cas se rencontre par exemple pour une suspension de particules solides dans un gaz avec $St \gg 1$ et $\rho_p \gg \rho_f$; il en est de même pour des émulsions ($\rho_p \ll \rho_f$ et $St \gg 1$ ou $St \rightarrow 0$). Notons enfin que l'équation de conservation de la masse est vérifiée $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_m = 0$ (ϕ étant supposée constante).

En additionnant terme à terme les deux équations (7) et (8), on obtient l'équation moyennée de conservation de la quantité de mouvement

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}_m \bar{\mathbf{u}} \right) = -\nabla \bar{p}^* + \nabla \cdot \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\sigma} - (\rho \mathbf{u})' \mathbf{u}') d\mathcal{V}, \quad (9)$$

avec $\bar{p}^* = \bar{\Phi} + \bar{p}_f$ (avec maintenant $\nabla \bar{\Phi} = -\bar{\rho} \mathbf{g}$). Cette équation n'est réellement intéressante que dans la mesure où l'on peut l'arranger sous une forme classique d'équation de bilan d'un milieu continu, c'est-à-dire si on a $\bar{\mathbf{u}}_m \approx \bar{\mathbf{u}}$ afin que les termes du membre de gauche puissent être identifiés à une dérivée matérielle. Si une telle condition est vérifiée, alors on peut immédiatement identifier l'expression du membre de droite sous l'opérateur divergence comme étant typique d'un tenseur de contraintes. Nous appellerons le tenseur macroscopique des extra-contraintes

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{u} \mathbf{u}') d\mathcal{V}, \quad (10)$$

qui est la forme proposée par Batchelor pour la contrainte macroscopique [1]. On montre que ce tenseur se décompose en une contribution fluide [9]

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(f)} = 2\mu \bar{\mathbf{d}} - \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_f} \rho_f \mathbf{u}' \mathbf{u}' d\mathcal{V}, \quad (11)$$

et une contribution particulière plus complexe

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(p)} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{A}_p} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{x} \mathbf{k} d\mathcal{A} - \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}_p} \rho_p \mathbf{u}' \mathbf{u}' d\mathcal{V} + \mathbf{G}(\omega_p), \quad (12)$$

où $\mathbf{G}(\omega_p)$ représente une fonction antisymétrique assez complexe de ω_p que l'on ne détaillera pas ici, notamment parce que dans la plupart des cas d'intérêt pratique, \mathbf{G} s'annule [9]. Le terme le plus intéressant est le premier terme de droite, que l'on peut représenter sous la forme équivalente : $na \langle \mathbf{f} \mathbf{k} \rangle$, qu'on a obtenu en écrivant qu'à la surface d'une particule, l'équilibre des contraintes amène à : $\mathbf{f} = \sigma_p \cdot \mathbf{k} d\mathcal{A} = (\sigma_f - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{k} d\mathcal{A} + \mathbf{f}_c$, où \mathbf{f} représente l'ensemble des forces de surface agissant sur une particule et \mathbf{f}_c l'action de contact exercée par une particule en contact. (On a fait de plus l'hypothèse que le système est ergodique et donc on peut remplacer des moyennes de volume par des moyennes d'ensemble). On reconnaît dans ce résultat un résultat bien connu des mécaniciens des sols [13] et qui permet de définir la contrainte macroscopique en fonction de la distribution de forces de contact entre particules \mathbf{f} .

2.2 Equation de bilan pour l'énergie

Dans le cadre de l'approximation d'une suspension monophasique à l'échelle macroscopique, on peut réaliser un calcul similaire pour l'énergie totale du système par unité de volume $E = \varepsilon + u^2/2$, où ε désigne l'énergie interne et $u^2/2$ est l'énergie cinétique (toujours par unité de volume). On montre alors [9]

$$\frac{d\rho\bar{\varepsilon}}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \rho \overline{u^2} = \bar{\sigma} : \bar{\mathbf{d}} + \nabla \cdot \mathbf{q} + \int_{\mathcal{A}_p} \mathbf{k} \cdot]\sigma \cdot \mathbf{u}[d\mathcal{A}. \quad (13)$$

Le premier terme du membre de gauche représente la variation de l'énergie interne et le second la variation d'énergie cinétique fluctuante (liée à une *température granulaire* $T = \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'}/3$ représentant l'agitation des particules). Dans le membre de droite, le premier terme représente le travail fourni par le cisaillement simple (en cisaillement simple on a : $\bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{d}} = \tau \dot{\gamma}$ avec τ la contrainte de cisaillement et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement), le second terme $\mathbf{q} = -\overline{\sigma \cdot \mathbf{u}'}$ est un flux d'énergie lié aux fluctuations de vitesses, tandis que le troisième est lié aux dissipations d'énergie lors des contacts entre particules (ce terme provient du fait que la vitesse de glissement au niveau du contact n'est pas nécessairement nulle, ce qui dissipe de l'énergie).

Une autre interprétation peut en être tirée après avoir intégré l'équation (13) sur un volume de contrôle \mathcal{V} de frontière \mathcal{A} . En réarrangeant les termes, on tire [14]

$$\int_{\mathcal{V}} \bar{\sigma} : \bar{\mathbf{d}} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{1}{2} \rho T \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} \right) d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} (\dot{\varepsilon} - \langle \mathbf{k} \cdot]\sigma \cdot \mathbf{u}[\rangle) d\mathcal{V}. \quad (14)$$

Le premier terme représente la production d'énergie sous l'effet du cisaillement. Il existe deux modes de dissipation de cette énergie. Une partie est dissipée sous l'effet de mécanismes de diffusion, qui ne font en fait que distribuer l'énergie. Dans le cas présent, il y a, d'une part, l'advection d'énergie fluctuante entre l'énergie fluctuante reçue et celle fournie au volume de contrôle) et, d'autre part, le flux d'énergie fluctuante \mathbf{q} qui peut dissiper de l'énergie aux frontières du domaine. Le second mode de dissipation de l'énergie est lié aux processus de dissipation interne soit par augmentation de l'énergie interne (production de chaleur sous l'effet du frottement visqueux ou des déformations inélastiques au sein des particules, et donc augmentation de la température thermodynamique du système), soit par dissipation au niveau des contacts entre particules (lorsque le contact est glissant).

Dans le cas d'un fluide newtonien, le terme de dissipation particulière n'existe pas, l'agitation particulière est très faible, et il en ressort que le principal mode de dissipation de l'énergie

est l'augmentation de l'énergie interne. Pour des suspensions concentrées, on introduit d'une part la possibilité de dissiper de l'énergie aux frontières (solides) si l'agitation particulaire est suffisante et d'autre part la possibilité de dissiper de l'énergie au niveau des contacts glissants entre particules. Du point de vue de la dissipation d'énergie, suspensions concentrées et fluides homogènes se comportent donc différemment. Une propriété remarquable en découle : dans le cas des fluides newtoniens, il y a équivalence entre équations de l'énergie et de la quantité de mouvement ; il est également possible de construire le tenseur des contraintes de la façon suivante : $\sigma_{ij} = \partial \rho \dot{E} / \partial \bar{d}_{ij}$. Dans le cas des suspensions très concentrées, une telle opération n'est possible que si l'on incluait dans l'énergie interne les autres termes de dissipation, termes dont on ne connaît pas d'expression générique. En pratique, pour des suspensions concentrées, l'équation de l'énergie n'est pas équivalente à celle de la quantité de mouvement et peut donc être utilisée comme équation supplémentaire pour la fermeture du problème.

2.3 Diagramme des régimes et calcul des contributions

Jusqu'à présent, nous avons utilisé l'opérateur *moyenne de volume* pour établir le lien entre micro- et macro-structure. Toutefois, nous ne pouvons guère espérer aller plus loin dans cette direction. Si l'on souhaite progresser dans la détermination d'une loi de comportement, la principale idée est d'examiner les contributions des différentes phases et de ne retenir que les termes prédominants. Cela se fait classiquement à l'aide de nombres sans dimension. Pour caractériser une interaction, il faut spécifier un temps caractéristique associé et un ordre de grandeur de la contrainte générée. Pour qu'une interaction soit prédominante, il faut à la fois qu'elle ait le temps de se produire et que sa magnitude soit bien supérieure à celle des autres. En pratique, la plupart des nombres sans dimension que l'on forme peuvent s'interpréter à la fois en termes de temps caractéristique et de force. C'est le cas par exemple du nombre de Stokes, qui est à la fois un rapport de temps de relaxation particule/ fluide et un rapport de force inertie des particules/frottement visqueux. Cela évite d'introduire une pléthore de nombres sans dimension. Pour les suspensions concentrées, d'autres nombres sans dimension que le nombre de Stokes peuvent être utilisés avec profit.

Considérons l'exemple d'un écoulement granulaire sec. Des réseaux de particules en contact se forment au cours du cisaillement. A chaque instant, des branches se créent, d'autres sont détruites. Prenons une particule appartenant à un réseau de force, donc supposée être soumise essentiellement à du frottement. A une profondeur h , l'ordre de grandeur de la contrainte normale σ_n est $\rho_p g h$. Le temps caractéristique du frottement t_p peut être estimé à partir de l'équation du mouvement de cette particule : $m\dot{v} \approx -\lambda \sigma_n a^2$, où λ désigne le coefficient de frottement interparticulaire. On déduit que le temps caractéristique (défini comme le temps nécessaire à ce que la particule parcourt une distance a) vaut à peu près $t_p \propto \sqrt{\rho_p a^2 / \sigma_n}$. Ce temps peut être comparé à la durée de vie du réseau de particules t_n . En cisaillement simple, au bout d'un temps $t_n \approx \dot{\gamma}^{-1}$, deux particules initialement en contact se trouvent séparées. On peut donc définir un nombre que nous appellerons de Coulomb sous la forme suivante [14]

$$Co = \left(\frac{t_p}{t_n} \right)^2 = \frac{\rho_p a^2 \dot{\gamma}^2}{\sigma_n},$$

rapport que l'on peut également interpréter comme le rapport d'une contrainte collisionnelle ou inertielle sur une contrainte normale. Les conséquences en termes dynamiques sont à établir :

- si $Co \ll 1$, cela veut dire que (i) la particule a le temps de s'adapter aux variations des contraintes macroscopiques durant un cycle de vie du réseau auquel elle a pris part,

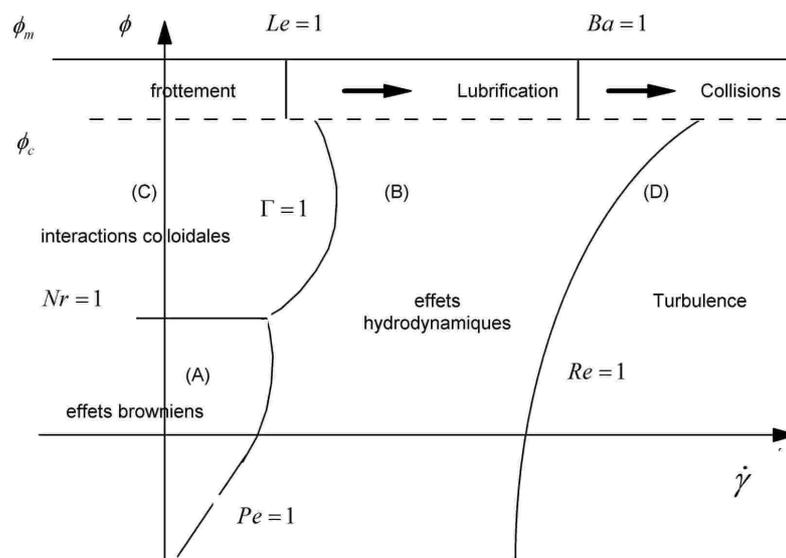


FIG. 2 – Diagramme simplifié des régimes d'écoulement. D'après [15, 16]. Les transitions entre régimes sont définies à l'aide de nombre sans dimension : le nombre de Péclet $Pe = 6\pi\mu a^3\dot{\gamma}/(kT)$ (T la température thermodynamique, k la constante de Boltzmann) pour la transition entre régimes brownien (agitation thermique des particules) et hydrodynamique ; le nombre de répulsion $Nr = \Psi/(kT)$ (avec Ψ le potentiel des interactions de van der Waals) pour la transition entre régimes colloïdal et brownien ; $\Gamma = 6\pi\mu a^3\dot{\gamma}/\Psi$ un nombre traduisant le rapport des forces hydrodynamiques sur les interactions colloïdales ; le nombre de Reynolds particulaire ou de l'écoulement pour la transition vers la turbulence ; le nombre de Leighton $Le = \mu\dot{\gamma}a/(\epsilon\sigma_n)$ (avec ϵa la distance moyenne de séparation entre les surfaces de deux particules voisines) pour la transition entre régimes hydrodynamique et frictionnel ; le nombre de Bagnold $Ba = \rho_p\dot{\gamma}\epsilon a/\mu$ pour la transition entre régimes hydrodynamique et collisionnel. Par ailleurs ϕ_m désigne la concentration solide maximale d'entassement ($\phi_m \approx 0,635$ pour des particules sphériques de même taille) et ϕ_c la concentration minimale d'apparition d'un réseau de particules en contact (ϕ_c de l'ordre de 0,5 pour des particules sphériques de même taille).

(ii) les effets inertiels sont négligeables devant les effets frictionnels, (iii) ce réseau de contact a matériellement le temps de transmettre des efforts des couches supérieures aux couches basales, (iv) une particule du réseau ressent des effets à très longue portée (il y a donc des effets non-locaux). On s'attend donc à ce que les contacts frictionnels jouent un rôle prédominant dans la dynamique d'ensemble et que le comportement macroscopique reflète ce comportement. On appelle *régime frictionnel* un tel régime d'écoulement.

- À l'opposé, lorsque $Co \gg 1$, cela implique que (i) la durée de vie des réseaux est trop courte pour que la transmission d'efforts ait lieu, (ii) les effets inertiels l'emportent sur les effets frictionnels, (iii) le mouvement de la particule est principalement influencée par le mouvement local des particules voisines (comportement similaire à un gaz dense). On appelle *régime collisionnel* un tel régime d'écoulement.

À l'aide d'un certain nombre de groupes sans dimensions, il est possible d'arriver à un établir un diagramme simplifié du comportement d'une suspension [15, 16, 9]. La figure 2 fournit une schématisation d'un tel diagramme dans le cas du cisaillement simple ; on a pris comme paramètres-clés sur le plan macroscopique la concentration solide ϕ et le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Pour les concentrations solides faibles à modérées, les régimes d'écoulement et leurs transitions vers d'autres régimes sont assez bien connus. En revanche, au fur et à mesure que la concentration solide augmente, la détermination de la loi de comportement est plus difficile.

3 Bilan et perspectives

L'idée force de l'approche rhéophysique est qu'il est possible de déduire ou d'expliquer le comportement rhéologique des suspensions concentrées par une analyse du comportement local et des interactions fluides/particules ; nous avons ici balayé les principaux concepts utilisés à cette fin et leurs limites. Un point que nous avons également développé concerne les nombres sans dimension caractérisant les écoulements. Une hypothèse est que, malgré le nombre de paramètres et de processus impliqués, une vision d'ensemble du comportement des suspensions peu être obtenue en se plaçant dans un diagramme $\dot{\gamma} - \phi$ et en considérant quelques nombres sans dimension. Nous avons montré que des nombres comme ceux de Coulomb, Bagnold, etc. peuvent être construits comme des rapports de temps ou de forces. Nos premières expériences sur des écoulements granulaires [14, 17] et des suspensions concentrées [18] ont confirmé qu'on pouvait caractériser à l'aide d'un seul nombre sans dimension le comportement macroscopique ; depuis ces essais, d'autres expériences tendent à confirmer ce résultat [19]. Il est légitime cependant de se demander quelle est la limite de cette hypothèse. Ainsi les expériences récentes de Lenoble *et al.* [20] ont permis de visualiser ce qui se passait dans une cellule de cisaillement de Couette et ont révélé un comportement bien plus riche que les modèles de champ moyen que nous proposons [18] ne considèrent en première analyse.

Références

- [1] G.K. Batchelor. The stress system in a suspension of free-forces particles. *J. Fluid Mech.*, 41 :545–570, 1970.
- [2] Y.A. Buyevich and I.N. Shchelchkova. Flow of dense suspension. *Prog. Aero. Sci.*, 18 :121–150, 1978.
- [3] D. Lhuillier. Transport phenomena in moderately concentrated suspensions of rigid spheres. *Physica A*, 165 :303–319, 1990.

- [4] D. Lhuillier. Ensemble averaging in slightly non-uniform suspensions. *Eur. J. Mech. B*, 6 :649–661, 1992.
- [5] D.Z. Zhang and A. Prosperetti. Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow. *J. Fluid Mech.*, 267 :185–219, 1994.
- [6] J.T. Jenkins and H.M. Hanes. Collisional sheet flows of sediment driven by a turbulent fluid. *J. Fluid Mech.*, 370 :29–52, 1998.
- [7] D.L. Koch and R.J. Hill. Inertial effects in suspension and porous-media flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 33 :619–647, 2001.
- [8] B.H.A.A. van der Brule and R.J.J. Jongshaap. Modeling of concentrated suspensions. *J. Stat. Phys.*, 62 :1225–1237, 1991.
- [9] C. Ancey, P. Coussot, and P. Evesque. A theoretical framework for very concentrated granular suspensions in a steady simple shear flow. *J. Rheol.*, 43 :1673–1699, 1999.
- [10] S. Kim and S.J. Karrila. *Microhydrodynamics : Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann, Stoneham, 1991.
- [11] E.J. Hinch. An averaged-equation approach to particle interactions in a fluid suspension. *J. Fluid Mech.*, 83 :695–720, 1977.
- [12] A. Sangani, G. Mo, H.K. Tsao, and D.L. Koch. Simple shear flows of dense gas-solid suspensions at finite Stokes numbers. *J. Fluid Mech.*, 313 :309–341, 1996.
- [13] J. Christoffersen, M.M. Mehrabadi, and S. Nemat-Nasser. A micromechanical description of granular behavior. *J. Appl. Mech.*, 48 :339–344, 1981.
- [14] C. Ancey and P. Evesque. Frictional-collisional regime for granular suspension flows down an inclined channel. *Phys. Rev. E*, 62 :8349–8360, 2000.
- [15] P. Coussot and C. Ancey. *Rhéophysique des pâtes et des suspensions*. EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [16] P. Coussot and C. Ancey. Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes. *Phys. Rev. E*, 59 :4445–4457, 1999.
- [17] C. Ancey. Dry granular flow down an inclined channel : Experimental investigations on the frictional-collisional regime. *Phys. Rev. E*, 65 :11304, 2002.
- [18] C. Ancey. Role of lubricated contacts in concentrated polydisperse suspensions. *J. Rheol.*, 45 :1421–1439, 2001.
- [19] GDR-MIDI. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14 :341–365, 2004.
- [20] M. Lenoble, P. Snabre, B. Pouligny, and C. Barentin. Shearing a granular paste in a Couette device : flow and size segregation. In H. Hermann, editor, *Powders and Grains*, Stuttgart, 2005. Balkema.