Le régime frictionnel-collisionnel dans les écoulements granulaires à surface libre

C. Ancey

Laboratoire Erosion Torrentielle, Neige et Avalanches (Cemagref), Saint-Martin-d'Hères

Résumé : Nous montrons dans cet article qu'il existe au moins deux régimes frictionnels-collisionels pour les écoulements granulaires à surface libre dans des canaux. Le régime A se caractérise par un profil de vitesse quasi-linéaire et une loi d'écoulement de la forme $q \propto h^n$, avec q le débit massique, h la hauteur d'écoulement, et n un exposant compris entre 2 et 3. Le régime B se caractérise par un profil de vitesse en grande partie concave et une loi d'écoulement de la forme $q \propto h$, impliquant que la vitesse moyenne de l'écoulement est constante. Ces résultats sont comparés à des résultats théoriques obtenus en utilisant deux modèles de loi de comportement. La loi utilisée par Savage est une superposition d'un terme collisionnel (calculé par la théorie cinétique) et d'un terme frictionnel (loi de Coulomb). Elle décrit bien dans l'ensemble les caractéristiques du régime A. La loi de comportement développée par Ancey et Evesque, fondée sur une formulation différente de la dissipation d'énergie, permet de rendre correctement compte des caractéristiques du régime B.

Mots-clés : écoulement granulaire, écoulement simple cisaillé en canal, régime collisionnel, régime frictionnel

Abstract : different frictional-collisional regimes have identified for granular flows down an inclined channel. Regime A is characterized by a fairly linear velocity profile and a discharge equation in the form $q \propto h^n$, with q the solid discharge, h the flow depth, and n and exponent ranging from 2 to 3. Regime B is characterized by a concave velocity profile and a discharge equation in the form $q \propto h$, implying that the mean velocity is constant. Experimental results are then compared to theoretical results obtained using two types of constitutive equations. Savage's kinetic model leads to a correct description of regime A while the constitutive model developed by Ancey and Evesque provides results in good agreement with experimental observations of regime B.

1. Introduction

En montagne, un certain nombre d'écoulements sont assimilables à des écoulements granulaires gravitaires à surface libre. Comme exemples typiques, on peut citer les écroulements rocheux en masse et certaines laves torrentielles. L'analogie peut également s'appliquer, avec précaution, à certaines formes d'avalanche de neige humide. Pour comprendre et modéliser les caractéristiques de ces écoulements, l'étude des écoulements granulaires est utile. Le principal problème est qu'à l'heure actuelle, la loi de comportement d'un milieu granulaire n'est que partiellement connue pour certains régimes d'écoulement. Par exemple, dans le cas d'écoulements dilués et fortement cisaillés, la théorie cinétique permet d'aboutir à une loi de comportement et de décrire correctement les écoulements gravitaires.

Dans le cas des écoulements naturels cités plus haut, l'analyse dimensionnelle permet de montrer que l'écoulement se situe dans un régime intermédiaire entre un régime purement collisionnel et un régime frictionnel [1]. Dans le premier régime, les contraintes résultent de transferts de quantité de mouvement par collisions entre grains alors que dans le second régime, elles résultent de la transmission des efforts gravitaires par le biais de contacts frictionnels entre grains. Ce régime intermédiaire est appelé le plus souvent frictionnel-collisionnel. Ses caractéristiques générales sont peu connues, et notamment, il n'y a pas de loi de comportement qui soit considérée unanimement comme permettant d'arriver à une bonne description des contraintes au sein du milieu.

L'objet de cet article est de présenter une comparaison entre deux modèles théoriques et des données expérimentales obtenues au laboratoire avec un canal incliné. Il est important à ce niveau de signaler qu'il est très peu aisé de procéder à une étude rhéométrique classique des écoulements granulaires denses, soit parce qu'on aboutit à des résultats difficilement interprétables [2], soit qu'il faille user d'artifices (comme fluidiser les grains) pour obtenir des résultats exploitables [3]. De ce fait, l'une des voies usuelles est de conjecturer ou de calculer des lois de comportement, d'intégrer les équations du mouvement pour obtenir le champ de vitesse connaissant le champ de contrainte, et de comparer cela à des données expérimentales. C'est ce qui est présenté dans le cadre de cet article.

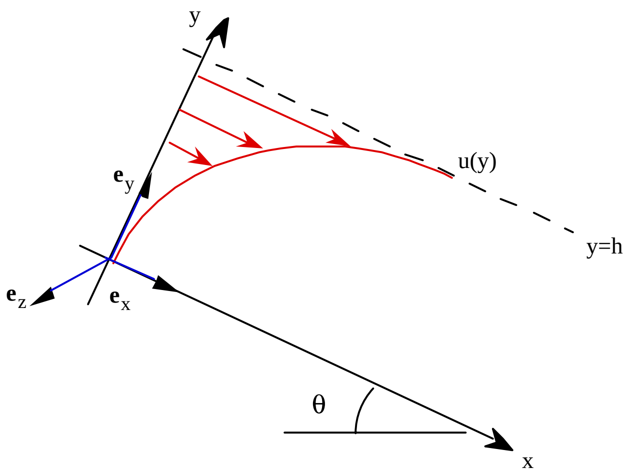

Figure 1 : schéma de principe de l'écoulement ; notations.

2. Modèles théoriques de loi de comportement

Vraisemblablement, Savage a été le premier a proposé une loi de comportement adaptée à la description des écoulements granulaires dans des canaux [4]. Il a décomposé le tenseur des contraintes en deux contributions, l'une collisionnelle calculée au moyen de la théorie cinétique de Savage et Jenkins, l'autre frictionnelle, calculée en utilisant la loi de Coulomb employée par les mécaniciens des sols pour décrire le seuil de rupture d'un sol granulaire. La contrainte de cisaillement τ s'écrit ainsi en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et de la concentration solide (volumique) en particules ϕ (cf. Fig. 1) :

$$\tau = 2\kappa(2+\lambda)\dot{\gamma} + p_0 \sin\varphi \qquad (1)$$

où κ désigne une viscosité qui est fonction de l'agitation des particules (température granulaire $T = \langle \mathbf{u}'.\mathbf{u}' \rangle$ avec $\mathbf{u}'$ la fluctuation de vitesse) $\kappa(T) = 2\phi^2(1+e)g_0\rho_p d\sqrt{T/\pi}$, avec d le diamètre des particules de masse volumique ρ_p, e le coefficient de restitution élastique, et g_0 la fonction de distribution radiale. Dans la contribution frictionnelle (second terme dans le membre de droite dans l'équation 1), p_0 désigne une pression “quasi-statique” tandis que φ est l'angle de frottement interne du matériau. La pression se déduit de la résolution des équations du mouvement (dans le cas présent, à partir de l'équation de conservation de quantité de mouvement selon l'axe y).

Pour un canal à fond rugueux incliné d'un angle θ, Savage a admis par ailleurs que le fond ne générait pas d'agitation particulière (flux d'énergie nulle) et donc que la température granulaire ne dépendait que de la contrainte normale moyenne agissant sur le fond ($|\sigma_b| = \bar{\phi} g h \cos\theta$, avec h la hauteur de matériau, $\bar{\phi}$ la concentration solide moyenne) : $T_b = \sigma_b / \left\{ 2(1+\varsigma)\phi_b^2(1+e)g_0(\phi_b) \right\}$, où ϕ_b désigne la concentration au fond et $\varsigma = \left(R\sqrt{27/(25\pi \tan^2\theta)} - 1 \right)\left(1 - \sin\varphi / \tan\theta\right)^{-1}$, avec $R = \sqrt{10(1-e)/3}$. Comme pour un écoulement permanent uniforme, la contrainte de cisaillement a une distribution bien déterminée : $\tau = \bar{\phi} g h \sin\theta$, Savage a déduit que le profil de vitesse était linéaire :

$$u(y) = R\sqrt{3T_b}\, y/d \qquad (2)$$

Une nouvelle intégration conduit à la loi d'écoulement, c'est-à-dire la relation liant hauteur et débit volumique : $q = R\sqrt{3T_b} h^2/(2d)$. Le fait le plus notable dans cette équation est la loi d'échelle $q \propto h^{5/2}$.

Savage a également montré qu'avec une telle loi de comportement, un écoulement permanent uniforme n'est possible que pour une gamme de pentes donnée par :

$$\frac{\sin\phi}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{\frac{10(1-e)}{\pi}} > \tan\theta > \sin\phi \qquad (3)$$

Dans le modèle de Savage, le schéma physique sous-jacent est le suivant : la gravité fournit au système de l'énergie $(\tau\dot{\gamma})$ qui est principalement dissipée par les collisions (contacts inélastiques) et transportée sous l'effet d'un gradient de température granulaire. Ce gradient génère à son tour des contraintes de cisaillement et normale (transfert de quantité de mouvement) et un champ de vitesse. Il est à noter que dans ce schéma, la contribution frictionnelle n'a qu'un rôle de stabilisation en ce sens qu'elle aide à aboutir à un équilibre mécanique [5] mais qu'elle ne joue pas de rôle ni dans la dissipation d'énergie, ni dans la dynamique globale.

Un schéma inverse peut tout aussi bien être proposé, dans lequel c'est la contribution frictionnelle qui joue le rôle moteur. En effet, comme l'ont montré Ancey *et al.* [6], la dissipation d'énergie par les collisions est relativement faible et, de fait, lorsque d'autres mécanismes de dissipation doivent se mettre en place ; dans le cas présent, ce sont les frottements entre grains qui assurent la dissipation de l'excédent d'énergie [7]. La principale difficulté dans l'évaluation est que cette dissipation est directement proportionnelle à la vitesse de glissement (au point de contact), or celle-ci entre grains fait intervenir non seulement la vitesse relative des centres de gravité mais également la vitesse de rotation propre. Pour résoudre proprement le problème, il faudrait donc tenir compte de la vitesse de rotation propre (moyenne et fluctuations) comme nouvelle variable et donc disposer de nouvelles équations. En partant d'une analyse de la dissipation au sein d'un écoulement granulaire simplement cisaillé, Ancey et Evesque [6] ont montré qu'en première approximation, le taux de dissipation devait être en moyenne constant pour une pente donnée. De là, ils ont déduit que le profil de vitesse était logarithmique sur une grande partie de la hauteur d'écoulement (sauf au fond et à la surface, où des couches limites devaient prendre place) :

$$u(y) = -A\sqrt{dg\cos\theta(\tan\theta - k)}\ln(1 - y/h) \qquad (4)$$

où $k = \tan\varphi$ dans la plupart des cas (mais $k = (1+2\tan^2\varphi)^{-1}$ est possible dans certains cas [7]), A est un paramètre sans dimension (intrinsèque au matériel). Pour des écoulements suffisamment épais, on peut négliger la contribution des couches limites et on déduit que le débit volumique s'écrit comme une fonction linéaire de la hauteur d'écoulement :

$$q = A\sqrt{dg\cos\theta(\tan\theta - k)}h \qquad (5)$$

Une condition d'existence d'un régime permanent est alors : $\tan\theta \geq k$.

Il est à noter que les deux théories ne sont pas contradictoires mais complémentaires. La théorie de Savage s'appliquerait plutôt à des écoulements denses en régime proche du régime collisionnel (écoulement rapide et peu épais) alors que la théorie d'Ancey et Evesque est plutôt représentative de situations proches du régime frictionnel (écoulement peu rapide et épais). Dans la seconde partie de l'article, nous montrons à travers un jeu d'expériences que cela est en partie bien vérifié.

3. Expériences

3.1 Montage expérimental

Le dispositif consistait en un canal de 2 m de long, 48 mm de large, en PVC traité antistatique, et avec un fond rugueux amovible. Le canal était alimenté en continu par une trémie. Le matériau injecté était ensuite récupéré par une seconde trémie puis remontée à la trémie supérieure par deux pompes (selon le principe de la vis d'Archimède).

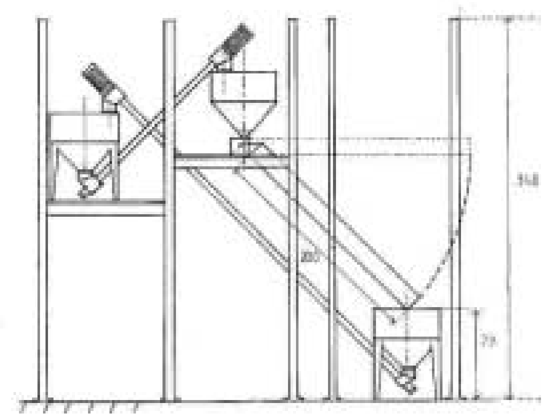

Figure 2 : schéma du dispositif.

Le débit massique injecté était déterminé à partir d'un étalonnage (par pesée) de la vanne de la trémie supérieure. Les hauteurs d'écoulement ont été mesurées à l'aide d'une série de capteurs ultrasoniques Weidmüller LRS3. Pour le profil de vitesse, nous avons utilisé des techniques de traitement d'images avec une caméra rapide et des billes colorées fournies par la société Sigmund Lindner (Allemagne). Il faut noter que seuls des profils à la paroi et à la surface libre sont accessibles par cette technique, or le frottement à la paroi réduit significativement (d'au moins 30 à 50 % la vitesse) de sorte que ces mesures ne permettent que d'avoir une idée grossière de la distribution de vitesse au sein du matériau. Les profils de densité ont été déterminés par gamma-densimétrie. Dans ce cas, il s'agit de mesures non perturbatives puisqu'on mesurait l'atténuation d'un faisceau de photons gamma émis par une source quasi ponctuelle placée à un bord du canal.

Nous avons testé plusieurs matériaux (billes de verre, sable). Dans le présent article, nous présenterons les résultats obtenus avec les billes de 1 mm de diamètre, qui sont typiques des résultats obtenus avec les billes fines. Pour des particules plus grossières, des différences parfois significatives ont été notées. Les billes ont été fournies par Verre Industrie. Il s'agissait de billes peu calibrées (avec des variations pouvant aller jusqu'à ± 100 µm). L'angle de frottement interne des billes (mesuré au triaxial) était de $26{,}5° \pm 0{,}5°$.

La procédure expérimentale consistait à mesurer le profil longitudinal de hauteur pour différentes valeurs de pente θ et de débit q. Pour un certain nombre de couples (θ, q), des profils (selon la normale au fond) de vitesse et de densité ont été également mesurés.

3.2 Régimes d'écoulement

Un premier point important, conforté par la plupart des expériences antérieures sur fond rugueux [1], est qu'un régime permanent uniforme ne peut prendre place pour une large gamme de débits que pour des inclinaisons de canal supérieures à 27°, soit à peu près la valeur de l'angle de frottement interne du matériau. Pour des angles légèrement inférieurs (ici entre 24° et 27°), nous avons pu observer des écoulements permanents mais uniquement pour une gamme restreinte de débits. Pour de forts débits, un lit de particules immobiles (zone morte) se formait sur le fond du canal et ramenait l'inclinaison effective du fond, sur lequel les billes s'écoulaient, légèrement au-delà de 27°.

Aux fortes pentes (plus de 35°), les billes commençaient à entrer en saltation (particulièrement aux faibles débits) et l'écoulement se présentait sous une forme manifestement plus diluée.

3.3 Résultats expérimentaux

Nous reportons à la figure 3 la variation de la hauteur d'écoulement en fonction du débit massique (par unité de largeur) pour deux rugosités différentes. Nous avons utilisé des grandeurs sans dimension, à savoir pour la hauteur h/d et $q_* = q/(\bar{\phi}\rho_p d\sqrt{gd})$, avec ici $\bar{\phi} = 0.6$.

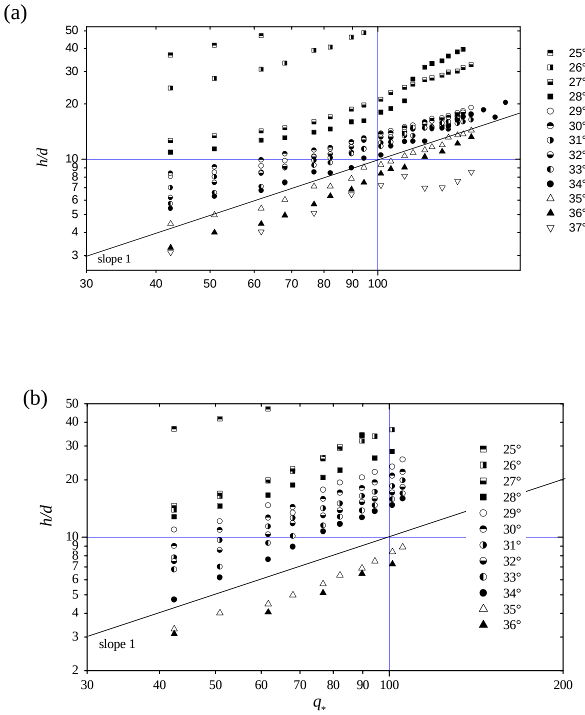

Figure 3 : (a) loi d'écoulement (sous forme non dimensionnelle) pour des billes de verre de 1 mm s'écoulant sur une rugosité de diamètre 1 mm. (b) loi d'écoulement dans le cas d'une rugosité de diamètre 0,36 mm.

La figure 3(a) montre qu'aux faibles débits, la hauteur variait comme une loi puissance du débit, avec $q \propto h^n$ où n était compris dans un intervalle 2–3 pour des pentes comprises entre 27° et 33°. Nous l'appellerons régime A. Aux forts débits, on pouvait toujours caler une loi puissance, mais la valeur de l'exposant n était bien plus faible : n était proche de 1,15 pour $\theta \geq 29°$ et 1,05 pour $\theta \leq 29°$. Une propriété remarquable est que la vitesse moyenne de l'écoulement (définie comme le rapport q/h) était une fonction croissante du débit puis tendait à devenir quasiment constante aux forts débits. Nous l'appellerons régime B. La transition d'un régime à un autre se faisait généralement de manière continue pour des débits (sans dimension) dans la gamme 68–84, mais dans certains cas (par exemple sur la figure 3(a) les angles 28° et 37°), la transition pouvait se faire brutalement pour un débit critique bien plus élevé ($q_* \approx 110$).

Comme le montre la figure 3(b), le changement de rugosité n'entraîne pas de modifications significatives. On observe principalement une transition vers le second régime pour des débits un peu plus faibles que précédemment (q_* autour de 70).

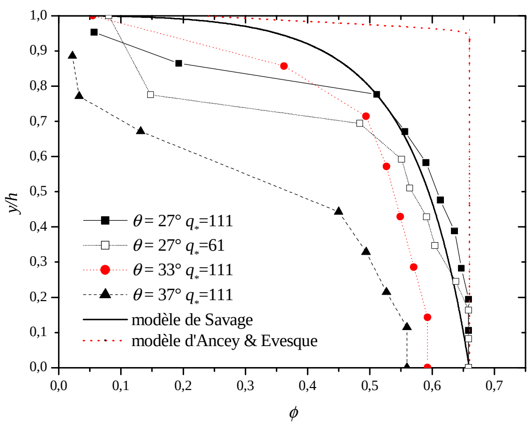

Figure 4 : profils de concentration volumique selon la hauteur.

La figure 4 montre le profil de concentration solide en fonction de la hauteur pour différents débits et pentes. Pour chaque essai, la concentration solide est une fonction décroissante de la hauteur, dont le taux de décroissance dépend de l'inclinaison du canal mais peu du débit solide. A faible pente (typiquement $\theta = 27°$), la concentration solide varie dans une gamme étroite 0,55–0,65 sur 80 % de sa hauteur, puis décroît rapidement. A plus forte pente ($\theta = 37°$), la concentration solide décroît très rapidement avec la hauteur.

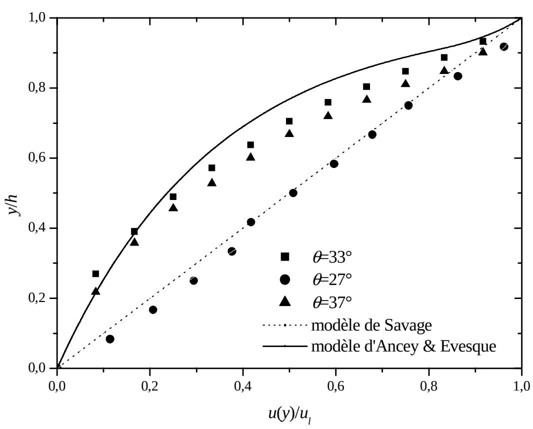

Figure 5 : profils de vitesse à la paroi selon la hauteur. Pour $\theta = 27°$, $h = 15$ mm ($q_* = 61$, $u_l = 0.66$ m/s), $\theta = 33°$ $h = 14$ mm ($q_* = 111$, $u_l = 0.86$ m/s), pour $\theta = 37°$ $h = 8.1$ mm ($q_* = 111$, $u_l = 2.1$ m/s). Pour le modèle de Savage ($e = 0.63$, $\varphi = 26.5°$, $u_l = 3.5$ m/s), et ($\theta = 27°$, $q_* = 61$). Pour le modèle d'Ancey et Evesque ($A = 34$, $\varphi = 26.5°$, $u_l = 2.74$ m/s) et ($\theta = 33°$, $q_* = 111$).

La figure 5 montre quelques profils de vitesse (à la paroi) typiques à différents débits et pentes. Nous avons utilisé une variable réduite pour la vitesse (rapport entre vitesse et vitesse à la surface libre) afin de réduire les effets de la paroi. Pour le régime A, le profil de vitesse était à peu près linéaire (aux fluctuations et incertitudes près) alors que pour le régime B, le profil de vitesse se présentait sous la forme d'une courbe concave près du fond, puis convexe dans une couche (représentant environ 20 % de la hauteur totale) à la surface libre.

3.4 Comparaison entre théories et expériences

Le modèle de Savage a deux paramètres indépendants : l'angle de frottement interne et le coefficient de restitution. Pour le premier paramètre, nous avons pris la valeur trouvée au triaxial. Pour le coefficient de restitution, nous avons calé sa valeur de telle sorte que la plage d'inclinaisons pour lesquelles un régime permanent uniforme a été observé corresponde à la plage théorique (équation 3). Nous avons trouvé : $e = 0,63$. Le modèle proposé par Savage décrit qualitativement la plupart des caractéristiques principales trouvées pour le régime A, à savoir : une loi d'écoulement de la forme $q \propto h^n$, avec $n = 5/2$ en théorie (contre $2 \le n \le 3$ expérimentalement, voir Fig. 3), un profil de vitesse linéaire (voir Fig. 5), une décroissance régulière de la concentration solide (voir Fig. 4). En revanche, si le modèle de Savage parvient à donner une estimation correcte du débit solide, ce bon agrément n'est obtenu que sur une plage restreinte d'inclinaisons. Pour le montrer, on a tracé à la figure 6 la variation de la vitesse moyenne U_* (rapport entre le débit volumique et la hauteur d'écoulement q_*/h_*) en fonction de l'inclinaison du canal et pour 2 débits différents (en se plaçant toujours dans le régime A). On a trouvé typiquement un accord correct pour des pentes comprises entre 28° et 34°.

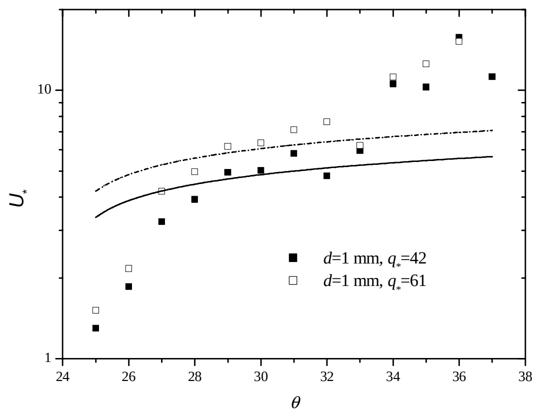

Figure 6 : variation de la vitesse moyenne en fonction de la pente pour le régime A et deux débits solides.

Le modèle développé par Ancey et Evesque possède également deux paramètres : l'angle de frottement interne et un coefficient de taux de dissipation A. La valeur de A a été déterminée en ajustant l'expression théorique à la loi d'écoulement expérimentale obtenue pour un angle de 28°. Nous avons trouvé $A = 34$. Ce modèle décrit qualitativement ce qui a été observé pour le régime B sauf pour le profil de concentration, qui décroît plus rapidement que ce ne le suppose le modèle. Concernant le profil de vitesse, le modèle donne la bonne allure mais a tendance à sous-estimer les vitesses près de la surface libre et à surestimer la position du point d'inflexion. Ce modèle prédit que la loi d'écoulement est linéaire (en première approximation en écartant la contribution des couches limites), ce qui est assez bien vérifié expérimentalement (voir Figure 3). Le modèle prédit une dépendance de la vitesse moyenne vis-à-vis de la pente de la forme $\sqrt{\tan\theta - \tan\varphi}$, ce qui est également bien vérifié expérimentalement comme le montre la figure 7.

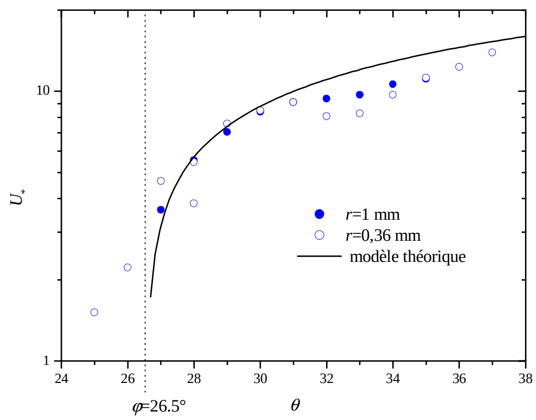

Figure 7 : variation de la vitesse moyenne en fonction de la pente pour le régime B.

Nous avons examiné la transition du régime A vers le régime B. La première idée est de penser à une perte de stabilité du régime A. Mais les calculs de stabilité linéaire réalisés sur la base du modèle de Savage (ou d'autres modèles similaires) aboutissent à des critères sous la forme d'une condition sur le nombre de Froude de l'écoulement, qui ne sont en accord avec les expériences [8]. Ce problème reste donc ouvert pour l'instant.

4. Conclusion

Nous avons testé deux lois de comportement proposées dans la littérature pour décrire des écoulements granulaires dans un régime dit *frictionnel-collisionnel*. Nous avons montré que le modèle cinétique de Savage permettait de décrire correctement les écoulements du régime A à condition d'ajuster la valeur du coefficient de restitution. De même, la loi de comportement proposée par Ancey et Evesque de modéliser avec un bon accord expérimental des écoulements plus épais (régime B), pour lesquels l'agitation collisionnelle est largement tempérée par le poids des couches de particules. En revanche la transition entre les deux régimes est très mal décrite par les critères proposés dans la littérature.

[1] Savage, S.B. The mechanics of rapid granular flows. *Adv. Appl. Mech*., 24, 289-366 (1984).

[2] Ancey, C., P. Coussot, and P. Evesque, Examination of the possibility of a fluid-mechanics treatment for dense granular flows. *Mech. Cohesive-Frictional Mater.*, 1, 385-403 (1996).

[3] Losert, W., L. Bocquet, T.C. Lubensky, and J.P. Gollub, Particle dynamics in sheared granular matter. *Phys. Rev. Lett.*, 85, 1428-1431 (2000).

[4] Savage, S.B. Granular flows down rough inclined - Review and extension, in *U.S./ Japan Seminar on new models and constitutive relations in the mechanics of granular materials*, (Elseviers Science Publishers, Amsterdam, 1982).

[5] Anderson, K.G. and R. Jackson, A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials for fully developed flow down inclined planes. *J. Fluid Mech*., 241, 145-168 (1992).

[6] Ancey, C. and P. Evesque, Frictional-collisional regime for granular suspension flows down an inclined channel. *Phys. Rev.* E, 65, 8349-8360 (2000).

[7] Ancey, C., P. Coussot, and P. Evesque, A theoretical framework for very concentrated granular suspensions in a steady simple shear flow. J. Rheol., 1999. 43, 1673-1699 (1999).

[8] Ancey, C., Dry granular flow down an inclined channel : Experimental investigations on the frictional-collisional regime. Soumis à *Phys. Rev. E* (2001).