

PHYSIQUE DES ÉCOULEMENTS GRANULAIRES SECS LE LONG DE PLANS INCLINÉS

Christophe ANCEY

Cemagref, Domaine Universitaire BP 76, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex,
christophe.ancey@cemagref.fr

RESUME : les canaux inclinés devraient constituer un des outils privilégiés pour l'étude des écoulements granulaires, car de manière générale ils permettent d'obtenir des informations pertinentes sur la rhéologie du matériau et dans le présent contexte, on peut y observer des écoulements cisailés sur des épaisseurs importantes. L'analyse des résultats expérimentaux montre qu'il existe au moins deux régimes d'écoulement : un régime *collisionnel*, caractérisé par une relation hauteur (h) - débit (q) de la forme $q \propto h^{5/2}$ et un régime que nous appelons *frictionnel-collisionnel* pour lequel : $q \propto h$.

ABSTRACT : inclined channels should be one of the privileged tools for studying granular flows, since, from a general viewpoint, they provide reliable rheological information and in the present context, it has been observed that flows can be sheared over the whole depth. A survey of experimental results reveals that at least two regimes can occur: a *collisional* regime, characterised by as discharge equation in the form: $q \propto h^{5/2}$, where h denotes the flow depth and q the discharge; a regime that we suggest calling '*frictional-collisional*' regime, for which: $q \propto h$.

MOTS-CLES : canal, loi de comportement, régime collisionnel, régime frictionnel-collisionnel

I. INTRODUCTION

Dans bien des expériences d'écoulement, on emploie des canaux inclinés à surface libre car ils constituent des géométries d'écoulement assez proches des cas pratiques tels qu'on peut les rencontrer dans l'industrie ou la nature. De manière plus générale, l'utilisation de canaux inclinés peut également se révéler avantageuse, car on peut tirer beaucoup d'informations sur le comportement rhéologique du matériau étudié. A quelques reprises, des canaux ont été utilisés comme des rhéomètres ; on peut ainsi citer des expériences sur des liquides polymériques, des matériaux granulaires secs, et des dispersions argileuses. En comparaison avec d'autres types de rhéomètre de laboratoire, un canal incliné présente de manière générale plusieurs avantages, en particulier lorsque l'on étudie des suspensions très concentrées et des matériaux granulaires. Un exemple typique concerne la localisation du cisaillement. En effet, en plaçant un matériau granulaire (du sable fin par exemple) au sein d'une cellule de cisaillement de type plan-plan ou Couette, on observe que, quelle que soit la vitesse à laquelle on sollicite le matériau, seule une mince couche de matériau (environ dix tailles de grain) est cisailée. Il y a donc fracturation et, à partir de là, il n'est guère possible de tirer des informations sur le comportement du matériau. A l'opposé, sur un canal incliné à fond rugueux, il est possible d'observer des écoulements cisailés sur toute leur hauteur (quelle que soit la hauteur).

Les canaux inclinés devraient apparaître assez naturellement comme un outil privilégié pour étudier des milieux hétérogènes complexes comme les matériaux granulaires. Si, dans la pratique, on constate qu'effectivement un assez grand nombre d'expériences sont basées sur des canaux, on reste assez perplexe devant les résultats obtenus, car de nombreux écarts apparaissent d'une expérience à l'autre. Ainsi, certains auteurs trouvent que la hauteur d'écoulement h varie linéairement avec le débit massique injecté q . D'autres auteurs arrivent à des lois d'écoulement de la forme : $q \propto h^{5/2}$. L'objectif de cet article est de brosser un tableau cohérent des résultats expérimentaux en essayant de les relier aux mécanismes physiques sous-jacents.

II. UN CANAL INCLINE COMME EXPERIENCE DISCRIMINANTE

Un canal incliné constitue à la fois un bon banc expérimental pour tester des lois de comportement et un moyen d'obtenir des informations sur la rhéologie du matériau étudié. Ici, nous admettons qu'un matériau granulaire peut, au moins en première approximation, être assimilé à un fluide homogène et continu, dont le comportement en cisaillement simple peut être décrit à l'aide d'une loi de comportement de la forme :

$$\tau = f(\dot{\gamma}, \zeta) \quad (1)$$

où τ désigne la contrainte de cisaillement, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement (gradient de vitesse ici), et ζ un ensemble de paramètres pouvant intervenir dans la loi de comportement (par exemple ζ peut inclure la concentration solide, la température granulaire, etc.). Dans le cas où cet ensemble ζ est vide, on parle de *fluide simple*. Dans ce cas, on peut montrer que, sur un plan infini incliné d'un angle θ , la loi de comportement peut se déduire de la loi d'écoulement (relation hauteur – débit en régime permanent) de la manière suivante [1] :

$$\dot{\gamma} = f^{-1}(\tau) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial q}{\partial h} \right)_\theta \quad (2)$$

Naturellement, comme il est peu vraisemblable que les matériaux granulaires soient des fluides simples, on ne peut guère espérer que l'équation (2) soit suffisante à pleinement renseigner sur leur loi de comportement, mais en tout cas, on peut escompter qu'elle donne au moins des tendances. On peut également faire remarquer qu'une telle relation est valable sur un plan infini alors que l'utilisation d'un canal conduit nécessairement à des effets de bords (influence des parois latérales sur le cisaillement) et de taille finie, qui peuvent influencer sur les résultats. En fait, d'une part ces effets perturbateurs peuvent être atténués (par exemple en choisissant des parois latérales très lisses et relativement espacées l'une de l'autre), mais d'autre part ils peuvent également servir à fournir des indices supplémentaires. Par exemple, l'éventuelle courbure de la surface libre renseigne sur l'existence d'une différence de contraintes normales non nulle ($N_1 = \Sigma_{xx} - \Sigma_{yy}$, avec Σ_{xx} et Σ_{yy} les contraintes normales selon la direction d'écoulement et le plan de cisaillement). On montre en effet que [1] :

$$N_1 = c - \rho g y \cos \theta \quad (3)$$

où y est la cote de la surface libre par rapport au fond et c une constante ($c = h$ si $N_1 = 0$). De même, on peut montrer que sur un tronçon de longueur finie, la hauteur d'écoulement doit varier de la manière suivante [1] :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\tau_p - \rho h g \sin \theta}{\alpha \rho \bar{u}^2 + \frac{\partial h \bar{\Sigma}_{xx}}{\partial h} - \frac{\bar{u}}{h} \frac{\partial h \bar{\Sigma}_{xx}}{\partial \bar{u}}} \quad (4)$$

où α est le coefficient de Boussinesq ($\alpha = \bar{u}^2 / \bar{u}^2$), $\bar{\Sigma}_{xx}$ la contrainte moyenne qui s'exerce dans la direction d'écoulement, $\bar{u} = q/h$ la vitesse moyenne. Ainsi la mesure de la variation longitudinale de la hauteur d'écoulement amène à des estimations de la contrainte normale moyenne $\bar{\Sigma}_{xx}$. D'autres éléments peuvent servir de test rhéologique ou d'expérience discriminante pour tester la pertinence d'une loi de comportement. Par exemple l'apparition d'instabilités de surface ou encore l'apparition d'un ressaut granulaire séparant un tronçon d'écoulement subcritique d'un tronçon supercritique sont autant des phénomènes qui reflètent le comportement rhéologique du matériau étudié.

III. UN TABLEAU DES RESULTATS EXPERIMENTAUX ET THEORIQUES

Un grand nombre d'expériences ont été réalisées ces 60 dernières années sur les milieux granulaires. Toutefois, compte tenu de la richesse du comportement, du nombre de paramètres intervenant, des différences dans les procédures expérimentales, bien peu de résultats se recoupent soit parce que les conditions expérimentales diffèrent trop, soit parce que les auteurs ne s'intéressent pas aux mêmes propriétés de l'écoulement. Par exemple, pour mesurer la vitesse moyenne, certains auteurs mesurent le profil de vitesse (à la paroi) sur un tronçon où le régime est établi et en déduisent une valeur moyenne [2]. D'autres assimilent la vitesse moyenne de l'écoulement à celle du front de propagation qui se forme quand on lâche une quantité de matériaux sur un plan incliné [3]. D'autres encore mesurent le débit massique et la hauteur et, en faisant une hypothèse sur la valeur de la concentration solide, en déduisent une vitesse moyenne [4]. De plus, pour avoir des lois d'échelle pertinentes, il faut en principe des gammes de données suffisamment étendues, ce qui est rarement le cas pour les milieux granulaires. En effet, en général, les articles se focalisent sur des gammes de pentes ou de hauteurs d'écoulement restreintes sans trop indiquer ce qui est observé en dehors du domaine étudié.

Nous avons ici tenté d'en dresser un tableau cohérent des résultats expérimentaux en nous appuyant sur des tentatives de description de la physique locale. Il est vraisemblable que dans un canal incliné, selon la pente et le débit, différents régimes puissent exister (à l'instar de ce qui est observé pour des fluides newtoniens). Quand le milieu granulaire est composé de particules suffisamment grosses pour ne pas être soumis aux effets électrostatiques et à l'influence de l'air (humidité, lubrification des contacts), les contraintes résultent principalement des interactions liées aux contacts directs entre particules solides. Selon la durée du contact, on peut distinguer la collision (contact bref), amenant surtout à un échange de quantité de mouvement, et le frottement (contact long), permettant la transmission de forces le long d'un réseau de particules en contact. Ainsi que l'a suggéré Savage [5], on s'attend à ce que puissent exister *un régime frictionnel*, où dominant les frottements entre grains, et un *régime collisionnel*, où les collisions prédominent. Entre ces deux régimes, existe vraisemblablement un régime intermédiaire, que l'on peut appeler *frictionnel-collisionnel*. Toutes proportions gardées, on n'est pas si loin des différences à opérer entre régimes laminaire et pleinement turbulent pour un fluide newtonien. Naturellement, la loi de comportement résultant des différentes interactions entre particules est très différente selon les régimes et, en conséquence, il faut s'attendre à ce que les changements dans la rhéologie

lorsqu'on passe d'un régime à un autre soient reflétés à travers des variations importantes des caractéristiques macroscopiques des écoulements, telles que la loi d'écoulement. Ce qui manque pour y voir un peu plus clair dans ces différents régimes, c'est un nombre sans dimension qui permette de délimiter les régimes à l'instar du nombre de Reynolds en turbulence. On peut suggérer en première approximation un nombre que nous appellerons ici le nombre de Coulomb, défini comme le rapport des magnitudes présumées pour les contributions collisionnelle et frictionnelle :

$$Co = \frac{R^2 \Gamma^2}{gH}$$

où R le rayon moyen des particules, H est l'ordre de grandeur de la hauteur d'écoulement et Γ celui du taux de cisaillement (on peut prendre $\Gamma = U/H$ en première approximation, avec U vitesse moyenne d'écoulement). Ainsi, le régime frictionnel correspondrait à un domaine de la forme : $Co \ll 1$, le régime collisionnel à : $Co \gg 1$, et le régime frictionnel-collisionnel à : $Co = O(1)$.

Dans le cas du régime collisionnel, on arrive en général à des lois théoriques d'écoulement de la forme : $q \approx h^{5/2} \sqrt{\sin \theta}$ et un profil de vitesse d'allure vaguement parabolique (convexe). Cependant il n'y a pas pour l'heure de consensus. En effet, selon le type de conditions aux limites choisi pour le fond, on peut aboutir à des profils de vitesse convexe, concave, ou linéaire ; de même, certains auteurs trouvent que la hauteur d'écoulement n'est pas liée au débit [6, 7]. Expérimentalement, une dépendance du débit en $h^{5/2}$ a été trouvée par plusieurs auteurs, dont notamment Pouliquen [3], Azanza [2], Ancey [8] sur des dispositifs expérimentaux très variés (canal bidimensionnel, canal étroit, canal large). Les conditions expérimentales correspondaient en général à des pentes inférieures à l'angle de frottement (jusqu'à 4 à 5° inférieures) et des hauteurs d'écoulement allant à quelques tailles de particules (au maximum 20 à 30). Tous ces auteurs ont également trouvé que la rugosité du fond avait une influence prépondérante sur les propriétés de l'écoulement. Ainsi Pouliquen a trouvé une loi d'échelle pour la loi d'écoulement de la forme : $q \approx h^{5/2} / h_{stop}(\theta)$, avec $h_{stop}(\theta)$ l'épaisseur minimum de matériau pour observer un écoulement permanent. Cela mettait clairement en évidence le rôle joué par la rugosité puisque $h_{stop}(\theta)$ dépendait principalement de la nature de la rugosité. Les caractéristiques des écoulements ont été comparées à quelques rares reprises à des prédictions de modèles collisionnels, principalement ceux issus de la théorie cinétique. Ainsi Azanza a observé que l'écoulement se caractérisait par un profil de vitesse quasi linéaire, une décroissance régulière et rapide de la compacité, et une augmentation de la température (en s'éloignant du fond). La comparaison avec des modèles cinétiques indiquait qu'un régime cinétique s'établit près de la surface libre, mais qu'au fond, l'écoulement est plutôt structuré en couches parallèles et qu'il est influencé significativement par la rugosité. De même, Ahn et ses collègues réalisèrent des expériences sur un canal incliné (20-24°) étroit [9]. En mesurant les propriétés de l'écoulement à la paroi, ces auteurs trouvèrent également des profils de vitesse linéaires, avec une vitesse au fond fonction de la rugosité. La compacité décroissait mais de manière non linéaire. A noter que, compte tenu de la loi d'écoulement, le nombre de Coulomb est trouvé ici être constant.

Aux plus fortes hauteurs d'écoulement, Ancey a observé une variation significative du comportement [8]. Pour les inclinaisons inférieures à l'angle de frottement interne du matériau, l'écoulement devenait instable. Une couche de matériaux se déposait sur le fond, avec pour effet de relever l'inclinaison réelle du fond sur lequel s'écoulait le matériau. Pour des pentes supérieures à l'angle de frottement interne, la structure de la loi d'écoulement

changeait pour des débits supérieurs à un débit critique (cf. Fig. 1). Une loi d'écoulement linéaire a été en effet calée : $q \approx h \tan \theta$. Plusieurs auteurs ont trouvé un comportement similaire. Citons : Takahasi pour du sable [10], Savage avec des billes de polystyrène [11], Suzuki et Tanaka avec de la poudre de calcite et des billes de verre [12]. Plusieurs auteurs ont également observé un profil de vitesse concave à linéaire [4, 8, 13].

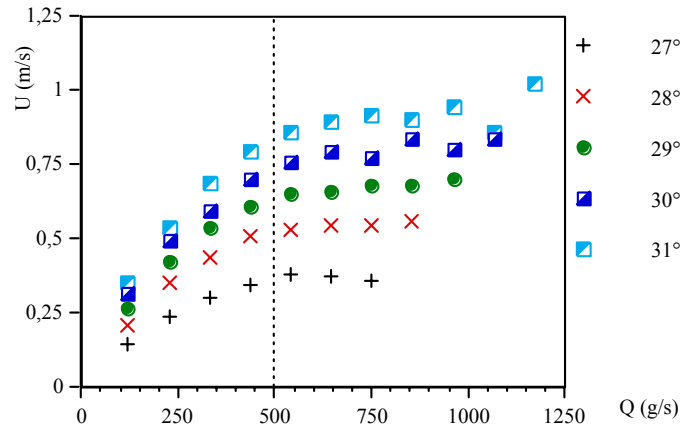


Fig. - 1 Variation de la vitesse moyenne ($U = q/h$) en fonction du débit dans le cas de billes de verre de diamètre moyen 0,3 mm en écoulement le long d'un canal incliné (ici de 27 à 31°) de largeur 4,8 cm et muni d'une rugosité au fond (de même taille que les billes en écoulement).

L'utilisation de l'équation (2) amène à trouver que : $\tau \propto \tan \theta / \dot{\gamma}$. Quoique peu cohérente en soi quand on l'interprète en termes de fluide simple [4], cette relation amène quelques informations intéressantes. Le fait que l'inclinaison intervienne (ce qui n'est pas possible pour un fluide simple) tend à montrer que la contrainte tangentielle peut également être une fonction de la contrainte normale σ . Cela justifie que nous appelions ce régime 'frictionnel-collisionnel' car, si l'on admet que la contribution frictionnelle à la contrainte de cisaillement peut être décrite par une loi de coulomb (de la forme $k\sigma$, avec k une constante), alors on peut aboutir à une dépendance de la contrainte de cisaillement avec la pente. La dépendance en $1/\dot{\gamma}$ est en revanche plus difficile à interpréter. Elle n'est en tout cas pas expliquée par les rares modèles théoriques développés jusqu'à présent, consistant le plus souvent à simplement sommer une contribution collisionnelle (issue de la théorie cinétique) et une contribution frictionnelle (loi de Coulomb) [14].

Jusqu'à présent, on a implicitement considéré qu'un type donné d'interaction prédominait dans tout l'espace. A l'instar des problèmes de couches limites visqueuses en turbulence, on peut se demander si effectivement cela est physiquement vraisemblable. Considérons pour cela l'exemple d'un écoulement épais sur un canal incliné à fond rugueux. Au fond, la vitesse de cisaillement est faible et le poids des couches supporté par les particules est important. On s'attend à être dans le domaine frictionnel ($Co \ll 1$). Inversement, près de la surface libre, les particules vont vite, le poids des couches est très faible. En moyenne, on s'attend à être dans le domaine collisionnel ($Co \gg 1$). Il est donc vraisemblable que plusieurs lois de comportement soient nécessaires à la description d'un écoulement suffisamment épais. Les expériences de Drake [15] et dans une moindre mesure, celles d'Azanza [2] ont montré une structuration de l'écoulement en différentes zones, où clairement prédominaient une cinématique et un type d'interaction.

Une dernière remarque concerne les conditions aux limites. Comme pour bien des fluides non newtoniens, on ne peut guère escompter en général une condition d'adhérence sur le fond. Là encore, selon la nature du fond (lisse/ rugueuse), des particules et du nombre de Coulomb, il faut s'attendre à des variations significatives de comportement. Prenons l'exemple de billes en mouvement le long d'un canal incliné avec un fond rugueux. Aux faibles hauteurs, les billes peuvent glisser et rebondir du fait de l'agitation collisionnelle ; on peut même présumer que la rugosité aide à l'agitation. En revanche aux fortes hauteurs, les billes du fond subissent le poids des colonnes de billes dessus et ont moins de latitude à se mouvoir les unes par rapport aux autres. Cela peut expliquer les différences de comportement notées par plusieurs auteurs quand on change la rugosité du fond [2, 8, 14].

références

1. Ancey, C. and P. Evesque (2000), Flow down inclined channel as a discriminating experiment., submitted to *Journal of Fluid Mechanics*,
2. Azanza, E., F. Chevoir, and P. Moucheron (1999), Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane, *Journal of Fluid Mechanics*, **400**, 199-227
3. Pouliquen, O. (1997), Scaling laws in granular flows down rough inclined planes, *Physics of Fluids*,
4. Ancey, C., P. Coussot, and P. Evesque (1996), Examination of the possibility of a fluid-mechanics treatment for dense granular flows, *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, **1**, 385-403
5. Savage, S.B. (1984), The mechanics of rapid granular flows, *Advances in Applied Mechanics*, **24**, 289-366
6. Anderson, K.G. and R. Jackson (1992), A comparison of the solutions of some proposed equations of motion of granular materials for fully developed flow down inclined planes, *Journal of Fluid Mechanics*, **241**, 145-168
7. Jenkins, J.T. (1994), Rapid granular flow down inclines, *Applied Mechanics Review*, **47**, 240-244
8. Ancey, C. (1997), *Rhéologie des écoulements granulaires en cisaillement simple, application aux laves torrentielles granulaires*, École Centrale de Paris
9. Ahn, H., C.E. Brennen, and R.H. Sabersky (1991), Measurements of velocity, velocity fluctuations, density, and stresses in chute flows of granular materials, *Journal of Applied Mechanics*, **58**, 792-803
10. Takahasi, K. (1937), On the dynamical properties of granular mass, *Geophysical Magazine*, **11**, 165-176
11. Savage, S.B. (1979), Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels, *Journal of Fluid Mechanics*, **92**, 53-96
12. Suzuki, A. and T. Tanaka (1971), Measurements of flow properties of powders along an inclined plane, *Ind. Eng. Chem. Fund.*, **10**, 84-91
13. Ishida, M., H. Hatano, and T. Shirai (1980), The flow of solid particles in an aerated inclined channel, *Powder Technology*, **27**, 7-12
14. Johnson, P.C. and R. Jackson (1990), Frictional-collisional equations of motion particulate flows and their application to chutes, *Journal of Fluid Mechanics*, **210**, 501-535
15. Drake, T.G. (1991), Granular Flow: physical experiments and their implications for microstructural theories, *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, 121-152